○川崎歩,フェリシャーニ・クラウディオ,柳澤大地,西成活裕(東京大学)

Exploration of Unknown Environments Using Lévy Walk with Swarm Robotics Ayumu Kawasaki, Claudio Feliciani, Daichi Yanagisawa, and Katsuhiro Nishinari (The University of Tokyo)

Key Words : Lévy Walk, Swarm Robotics, Unknown Environment Exploration

Abstract

This study compares the performance of various random walks in swarm robotic exploration of unknown environments and analyzes the impact of parameters and environmental conditions on efficiency. While Lévy Walks demonstrated higher efficiency under specific conditions, no synergistic effects were observed in mixed swarms. This research provides fundamental insights for designing efficient exploration algorithms in swarm robotics.

1 序論

群知能(Swarm Intelligence: SI)の概念は 1980 年 に Beni および Wang によって提唱され [1],多くの 研究者の関心を集めてきた [2]. この概念は,生物の 群れに見られる複雑な集団行動から着想を得ている. これらの行動には,ミツバチの 8 の字ダンス,アリの 経路作成などが含まれ,最適化,経路制御,マイニン グなどの分野で応用されている [3] [4]. この SI をマ ルチロボットシステムへ適用する試みはスワームロボ ティクス(Swarm Robotics: SR)と呼ばれている [5]. この SR において広く注目されているものの一つが集 団探索である.これは惑星探査をはじめ [6] [7],捜索 救助 [8],採餌行動 [9] など多くの分野で注目されて いる.

集団探索においてターゲットの存在が未知で環境 条件が予測不可能な場合には、より複雑な位置特定や マッピングを必要とする高度な探索戦略が必要にな る.一方、SR システムは、局所的なセンシング能力 や低い計算能力を持つ単純なロボットで構成されてお り、中央制御も存在しないため、このような複雑な戦 略を採用することは不可能である.そのため、ターゲッ トに関する事前知識がない場合、ロボットはランダム な探索を行う必要がある [10]. 実際、多くの探索戦略 が単一ロボットや集中型 SR システム向けに提案され ている一方で [11]、ロボット群による探索では依然と してランダムウォーク(Randam Walk: RW)が最も一 般的に採用されている [12]. RW が選ばれる主な理由 はシンプルな実装が可能であること、位置特定や通信 に依存しないため,柔軟性,スケーラビリティ,堅牢 性を持つことが挙げられる. RW のバリエーションの 中で,特に相関ランダムウォーク (Correlated Random Walk: CRW) とレヴィウォーク (Lévy Walk: LW) と いう 2 つの RW が特に注目されている. CRW は連 続する動きの方向性に正の相関があることが特徴であ り,LW は以下のような冪乗分布で特徴付けられるス テップ長分布に従う点で独特である. この分布は短い 移動を多数含みながら,時折長距離移動を行う性質を 持つ.

$$f_{\rm L}(\ell) \propto \ell^{-(\alpha+1)}, \quad 0 < \alpha \le 2$$
 (1)

特に LW はターゲットがまばらに分布している環境 において効率的な探索を行うことができるとされて いる [13] [14].

本研究では、特に惑星表面の SR の集団探索におけ る、バイオシグニチャーや資源、地形などの探査を想 定して、異なる環境下での各種 RW の性能を比較する ことを目的とする. 具体的には、回転角とステップ長 のパラメータが探索性能に与える影響を解析するとと もに、障害物の配置、境界条件の変化といった環境要 因を詳細に検討する. また、異なるロボット群を混ぜ 合わせる混合群を考え、その相乗的な効果の有無につ いても検討する. また、群の大きさが探索性能に及ぼ す影響についても解析を行い、多様な環境変化に対す る各種 RW の適応性を明らかにすることを目指す.

2 シミュレーション設定

本研究では特に 2 次元空間における RW を考える. なお、本研究では有限の一定速度 velocity でロボット が動き、一定時間ごとに位置を更新する RW を考え る. RW は一連の直線移動のステップからなり、それ ぞれの回転角 θ とステップ長 ℓ がランダムに選択さ れる.

まず,回転角 θ は巻き込みコーシー分布から選択する. この分布は以下の確率密度関数で表される.

$$f_{\rm W}(\theta;\mu,\rho) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2 - 2\rho\cos(\theta-\mu)}, \quad 0 \le \rho < 1$$
(2)

ここで、 μ は方向の平均(本研究では $\mu = 0$)、 ρ は分 布の偏りを示すパラメータである. $\rho = 0$ の場合、 θ は一様分布に従い、 ρ が増加するにつれて θ はより大 きな角度に偏り、 $\rho \to 1$ の場合、ディラックのデルタ 関数になり直線的な運動を示す. CRW は $\rho > 0$ の特 徴を持つ RW であり、連続するステップの方向が正の 相関を持つため、高い確率で同じような方向に移動す る傾向がある.

次に直線運動におけるステップ長ℓはレヴィ安定分 布から選択する.この分布は以下の確率密度関数で表 される.

$$f_{\rm L}(\ell;\alpha,\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|q|^{\alpha}} \cos(q\ell) dq, \quad 0 < \alpha \le 2$$
(3)

ここで、 γ はスケール因子(本研究では $\gamma = 1$)、 α は安定性パラメータであり、尾部の形状を決定する. α の値が大きいほど尾部が短くなり、非常に長い移動 が起こる頻度が減少する。特に $\alpha = 2$ の場合は、正 規分布に一致し、ブラウン運動と同じ性質を持つ。な お、 $\gamma = 1$ の場合、十分大きな ℓ に対して冪乗則に従 うことが知られている[15]. この分布はスケール不変 の性質を持つことが知られており、この分布からサン プリングされた移動長を定数倍することで、異なるス ケールのLWを生成することができる。図1に巻き 込みコーシー分布とレヴィ安定分布の確率密度関数を 示す.

本研究では便宜上,特に2種類のRWに対して「純粋なLW」,「純粋なRW」と命名した.これらはともに,回転角は一様分布からサンプリングされ,ステップ長について,純粋なLWは $\alpha = 1$ のレヴィ安定分布からサンプリングされ,純粋なRWは, $\alpha = 1$ の閾

値で切り詰めたレヴィ安定分布の期待値に等しい定数 ℓ₀ とした.



図 1: (a) 巻き込みコーシー分布, (b) レヴィ安定分布 の確率密度関数.

アルゴリズムについて,単一ロボット,群ロボット の状態遷移図を図2に示す.それぞれのロボットはス テップ毎に

- 1. ターゲットを検知
- 2. 状態に応じて次の移動を決定
- 3. 位置を更新

という処理を行う.状態は図 2 で言うところ の四角で囲まれた部分であり, IDLE, MOVING, AVOIDING_OBSTACLE, そして群ロボットの場合 は AVOIDING ROBOT がある.

菱形で囲まれた部分は条件分岐を表す.特筆すべき 点としてはどちらのアルゴリズムにも障害物回避行動 が含まれていること,群ロボットの場合はさらに他の ロボットとの衝突回避行動も含まれていることが挙げ られる.





それぞれのロボットは RW を行い,他のロボット あるいは障害物を避けながら 25 個のランダムに配置 されたターゲットを探索する.障害物が存在する環境 の様子,また障害物のない環境における実際のシミュ レーション中のある時刻のスナップショットを図 3 に 示す.



図 3: (a) フィールドの様子. 赤色の点がターゲットを, 灰色の正方形が障害物を表す. (b) 障害物のない環境 におけるシミュレーションの様子.

3 単一ロボットのシミュレーション

RW の特性を深く理解するためには,各種パラメー タがどのように RW の挙動に影響を与えるかを分析す ることが重要である.本節では,このパラメータ依存 性を明らかにすることを目的とし,単一ロボットにつ いてシミュレーションを行った.ここでは純粋な RW について調べた.なお,障害物はない状態とし,周期 境界条件を課した.

3.1 ロボットパラメータに対する変化

まず,周期境界条件下においてロボットのパラメー タである検知半径 detection_radius,ステップ数 frames が探索数 S に与える影響を調べた.なお,ここではシ ミュレーション中に発見された独立なターゲット数を 探索数と呼ぶ.

3.1.1 結果

各パラメータによる *S* の変化を図 4 の青色の線に 示す. どちらのパラメータにおいても, *S* はそのパラ メータに対して単調に増加しているが, その増加の様 子は異なることが読み取れる.



図 4: 単一ロボットにおける探索数の変化. 横軸は (a) 検知半径, (b) ステップ数. 青色がシミュレーション結 果を, 橙色がフィッティング曲線を, 緑色が理論式を 表す.

3.1.2 考察

まず,離散 RW の理論との比較を行う.2 次元の格 子点の上を RW する粒子の運動を考えた時,粒子が *n* 回目のステップまでに訪れる独立な格子点の数 *S_n* は n が十分大きいとき $S_n \propto n/\ln(n)$ と表せることが知 られている [16] [17]. この式をシミュレーション結果 と比較した.フィッティングには、パラメータを k と して $kn/\ln(n)$ という関数を用いた.なおここでは比 較のため n をステップ数ではなく直線移動の回数と した.その結果が図 4 の橙色の線である.この図では k = 0.044 と推定され、相関係数は r > 0.999 である. ここから、S は離散 RW の場合と同様に $n/\ln(n)$ に 比例しているということが分かる.

次に,ウィーナー過程の理論との比較を行う.連続時間 RW の極限であるウィーナー過程に従って 2 次 元平面上を移動する軌跡の *r*-平行近傍の領域の面積は 式 (4) と表せることが知られている [18].

$$\mathbb{E}[V_2(S_r)] = \pi r^2 + \frac{8r^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\frac{\sigma^2 y^2 T}{2r^2}}}{y^3 (J_0^2(y) + Y_0^2(y))} dy$$
(4)

この式 (4) は r, T, σ に依存する関数である.まず, 本シミュレーションにおいて r は detection_radius そ のものである. T と σ を計算する.まず,生成され るステップ長は定数 ℓ_0 とする.その移動に必要なス テップ数を τ として, $\tau = \ell_0$ /velocity とし,これを 1 秒とする.次にこの時間でスケーリングした RW に対して分散を考える.移動ベクトルを ($\Delta x, \Delta y$) = $(\ell_0 \cos \theta, \ell_0 \sin \theta)$ とすると, $\mathbb{E}[\Delta x] = \mathbb{E}[\Delta y] = 0$ であ り, $\mathbb{E}[\Delta x^2] = \mathbb{E}[\Delta y^2] = \ell_0^2/2$ である.なお,共分散 は 0 である.よって 1 秒後の分散行列は以下のように なる.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \ell_0^2 / 2 & 0\\ 0 & \ell_0^2 / 2 \end{bmatrix}$$
(5)

したがって t 秒後の分散行列は $\Sigma_t = t\Sigma$ であるの で, t 秒後の分散はそれぞれ $t\ell_0^2/2$ である.以上より $\sigma^2 = \ell_0^2/2$ である.そして, T は frames/ τ である.こ れまでの計算結果を式 (4) に代入し,それにターゲッ ト密度をかけることで期待ターゲット数 $\mathbb{E}[S]$ を計算 した結果を図 4 の緑色の線に示す.これを見ると概 ね理論式と一致しているが,ずれが生じていることが 分かる.なお,本シミュレーションは周期境界条件で 行っているため,その点で理論式とのずれが生じる可 能性があり,特に frames についての理論式が全体的に シミュレーションより高い値になっているのはその影 響だと考えられる.具体的には,周期境界条件下で境 界を跨いだ後に同じターゲットを検知した時は探索数 に加算されないが,ターゲットが同じ密度で無限大の 広さを持つ空間では探索数に加算されるからである.

3.2 境界条件に対する変化

本項で用いる効率として**探索効率** η を定義する.こ れは探索数Sを、ロボットの移動長合計Lで割った 値とする.

$$\eta = S/L \tag{6}$$

各種 RW は回転角 θ を決定する巻き込みコーシー 分布のパラメータρとステップ長 ℓ を決定するレヴィ 安定分布のパラメータαによって特徴づけられる.本 項では回転角とステップ長のパラメータρ,αを変化 させた際の純粋な RW の探索効率 η を各種境界条件 で比較した.ここでは周期境界,反射境界,開放境界 の3つの境界条件を考えた.図5にそれぞれの境界条 件下での結果を示す.

ηは、周期境界・反射境界と開放境界では異なる挙 動を示すことが分かる. 前者では ρ が大きいほど効率 が高くなる傾向にあり、さらに中程度の ρ においては α が小さいほど効率が高くなる傾向にある. これはす なわち直進し続ける軌道に近づけば近づくほど効率が 高くなることを示している.実際,反射境界条件にお いては弾丸軌道、すなわち方向転換を一切行わず直進 し続け、境界で反射するという移動規則が最もマッピ ング性能が高いことが知られており [19], この結果は その事実と一致していると言える. 逆に開放境界では ρが大きいと効率は一気に減少し, α については大き くなるとやや効率が高くなる傾向にあり、 $\alpha \sim 1.8$ 付 近で効率が最も高くなっていることがわかる.開放境 界においては直進し続けるとターゲットが存在しない 空間に早い段階で到達してしまうため、このような結 果になると考えられる. また、ターゲットが十分にま ばらであれば純粋な LW の効率が高いが、ターゲット が密集している場合にはブラウン運動,つまりα~2 の効率の方が高いということが知られており [20],こ の結果はその事実と一致していると考えられる.

4 群ロボットのシミュレーション

4.1 ロボット数の変化による効率の変化

まず、本項以降で用いる効率として以下の 3 つを 定義する. η_{global} と η_{local} は前項の η の拡張になって いる.

1. **グローバル探索効率** η_{global} : 群としてひとかたま りに見た際の性能を表す. 群全体で発見された独 立なターゲット数 S_{global} をロボット全体の移動長 合計で割った値とする. N はロボット数, L_i は i



図 5: (a) 周期境界, (b) 反射境界, (c) 開放境界条件下 における探索効率.

番目のロボットの総移動長とする.

$$\eta_{\text{global}} = S_{\text{total}} / \sum_{i=1}^{N} L_i$$

2. ローカル探索効率 η_{local} : 群の中の個々のロボット の性能を表す. 各ロボットが発見した独立なター ゲット数 S_i を総移動長 L_i で割った値の平均と する.

$$\eta_{\text{local}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{S_i}{L_i}$$

 総探索コスト Etotal: ターゲットの探索にかかった 総コスト(eg. 電力消費量)を表す. つまりこの値 においては低い方が効率が高いと言える. 群全体 で全てのターゲットに訪れるまでの総ステップ数 Tにロボット数 N を掛けた値とする.

$$E_{\text{total}} = T \cdot N$$

スワームロボティクスを構成する上で、ロボット数 の増加による効率の変化の程度を調べることは重要で ある.本項では、純粋なLWに従って移動するロボッ トに対して群全体で全てのターゲットに訪れるまでの 総ステップ数Tの変化、およびロボット数を変化さ せた際の η_{global} , η_{local} , E_{total} の変化を調べた.また、 障害物に対するそれらの変化を調べた.なお、ここで は周期境界を課し、障害物の個数を num_obstacles=0, 16 とした.シミュレーションの結果を図 6 に示す.

まず,総ステップ数Tについては num robots の増 加に従って減少、つまり効率は改善していき、頭打ち になる傾向が見られる. 以降でそれぞれの効率を見て いく. 障害物の有無に関わらず η_{global} は num_robots の増加につれて同じように減少していく傾向が見られ る. これは num robots の増加に対して総移動長の合 計は線形に増加するが、群全体で発見した独立なター ゲット数の増加は探索の重複により緩やかになってい くためであると考えられる.一方で個々の性能を示す η_{local}は num robots の増加につれて緩やかな減少傾向 にある. これはロボット同士の衝突回避の影響により 生成されるステップ長分布と実際のステップ長分布 に差が生じ、最適なステップ長分布からのずれが生じ るためだと考えられる.障害物のある環境において, η_{global} は大まかには障害物のない環境と同様の挙動を 示すが,η_{local} は num_robots の増加に対してより急激 に減少する傾向が見られる.また,総探索コスト Etotal については num_robots の増加につれて増加していき, 効率が悪化していることが分かる.しかしその様子は 障害物の有無によって異なり,障害物がある場合の方 が効率が急激に悪くなっていることが分かる.これら の結果は障害物がない場合と比べてロボットの密度が 高くなりやすく,それによる性能の低下がより顕著に なるためであると考えられる.

4.2 混合群の効率の比較

本項では,異なる RW のロボットが混在する群の効 率を比較した.周期境界を課し,効率は η_{local} のみを 考えた.まず,移動様式混合群について考える.純粋 な RW に対して純粋な LW を混合させ,その割合を ratio として変化させた.単一ロボットにおいて純粋な RW と純粋な LW を比較すると後者の方が効率が良 いが,それらを組み合わせた場合にどのような効率の 変化を示すのかを調べた.また,障害物の存在する環 境においても特に num_robots=25 の場合に絞って障 害物の個数を num_obstacle=2,4,16 として同様にシ ミュレーションを行なった.シミュレーションの結果 を図 7 に示す.

次にスケール混合群について考える. ここでは RW の様式を LW に揃えた. 純粋な LW に対してステップ 長がその 5 倍である純粋な LW を混合させ,その割合 を ratio として変化させた. また,障害物の存在する環 境においても特に num_robots=25 の場合に絞って同 様にシミュレーションを行なった. シミュレーション の結果を図 8 に示す.

混合群を適用しても相乗的な効果は得られず,ratio に対してほとんど線形に変化することがわかった.こ れは,混合群に対しても個々の RW の特性がそのま ま現れていることを示している.また,num_robots が 増えると,全てのratio において η_{local} が低下するとい う,前項と同様の結果が得られた.

また,障害物が存在する環境下においては ratio の増 加に対して,障害物が多くなるほど大きな傾きで η_{local} が増加している.ここには,障害物が増加することに より実質的なターゲット密度が増えるという正の効果 と,障害物によって行手を阻まれるという負の効果の バランスが関係していると考えられる.障害物の個数 が同じである同じ色の線に注目した時,ターゲット密 度増加の効果は一定であるので,障害物によって行手 を阻まれる効果が,LW やスケールの大きいLW に見 られる長距離移動によって,より克服されていると考 えられる.



図 6: ロボット数による (a) 総ステップ数, (b) グローバル探索効率, (c) ローカル探索効率, (d) 総探索コストの変化. なお, (a), (d) は縦軸を反転させている.

5 結論,今後の課題

3.1 項では異なるパラメータに対する効率の変化を 調べ、それに対して離散 RW とウィーナー過程の理 論を用いて考察した. 3.2 項では境界条件の変化によ る探索効率の比較を行なった. ここでは各種境界条件 によって最適な RW の様式が異なることが分かった. 4.1 項ではロボット数の変化による効率の比較を行っ た. グローバル探索効率 η_{global} はロボット数が増える と下げ止まりになっていき、ローカル探索効率 η_{local} は障害物が存在しない環境下においては緩やかに、存 在する環境下においてはやや急激に減少する傾向が見 られた.総探索コスト E_{total} についても η_{local} と同様の 傾向が見られた. 4.2 項では異なる移動様式の混合群 と異なるスケールの混合群における効率の比較を行っ た. 異なる群を混合させても効率は劇的に変化するこ とはなく、個々の RW の特性がそのまま現れているこ とが示された.また,障害物が存在する環境下におい ては割合の変化に対して,障害物が多くなるほど大き な傾きで η_{local} が変化することが示された.

今後の課題としてはさまざまなものが考えられる. まず、本研究のシミュレーションは理想的なモデルに 基づいており、実際のスワームロボティクスに適用す るためには多くの課題が残されている.具体的には、 ロボット間の通信、センサーの性能、ロボットの動作 における遅延など、現実世界での実装に伴う様々な要 素を考慮する必要がある.これらの要素を取り入れた シミュレーターを利用したり、kilobot などの実際の ロボットを用いた実験を行うことが今後の重要な課 題である.さらに 3.1 項で述べたような、理論的なア プローチも考えられるかもしれない.複数のロボット が協調して動作する場合、その効率を定式化すること ができれば、より最適化された探索アルゴリズムの開 発につながると考えられる.ここにおいては、他のロ



図 7: 移動様式混合群におけるローカル探索効率の変 化. (a) 異なるロボット数, (b) 異なる障害物数に対す る結果を示す.

ボットに対してどのような反射行動を持つかによっ て導かれる数式が異なると考えられる. さらに、反射 行動を変化させることでロボットの探索効率がどのよ うに影響を受けるかを調査することも、有意義な研究 テーマとなり得るのではないかと考えられる. 最後に、 群ロボットの特性を最大限に活かすために、リーダー フォロワー型のアルゴリズムを詳細に検討することも 考えられる. これは高性能なリーダーロボットがター ゲットの推定位置をフォロワーロボットに伝え、フォ ロワーロボットがその情報を元に探索を行うことで探 索効率を向上させる考え方である.本研究では衝突を 除いて他のロボットとの相互作用を考慮しておらず, η_{local}の劇的な改善は見られなかったが、これに加えて 情報の受け渡しを認めることで, η_{local} を劇的に向上さ せることができるアルゴリズムを構築できる可能性が ある.この分野に関する研究は既に多くあり[21]、こ れらを参考にしながら新たなアルゴリズムの検討を行



図 8: スケール混合群におけるローカル探索効率の変 化. (a) 異なるロボット数, (b) 異なる障害物数に対す る結果を示す.

うことも可能であると考えられる.

参考文献

- Gerardo Beni. The concept of cellular robotic system. In Proceedings IEEE International Symposium on Intelligent Control 1988, pages 57–62. IEEE, 1988.
- [2] Amrita Chakraborty and Arpan Kumar Kar. Swarm intelligence: A review of algorithms. *Nature-inspired computing and optimization: Theory and applications*, pages 475–494, 2017.
- [3] Sagiraju Hima Keerthi, Ashwini K, and Vijaykumar M.V. Survey paper on swarm intelligence. *International Journal of Computer Applications*, 115:8–12, 2015.
- [4] David Martens, Bart Baesens, and Tom Fawcett. Editorial survey: swarm intelligence for data mining. *Machine Learning*, 82:1–42, 2010.
- [5] Erol Şahin. Swarm robotics: From sources of inspiration to domains of application. In *International workshop on swarm robotics*, pages 10–20. Springer, 2004.
- [6] SA Curtis, ML Rilee, PE Clark, and GC Marr. Use of

swarm intelligence in spacecraft constellations for the resource exploration of the asteroid belt. In *Proceedings of the Third International Workshop on Satellite Constellations and Formation Flying*, pages 24–26, 2003.

- [7] David St-Onge, Marcel Kaufmann, Jacopo Panerati, Benjamin Ramtoula, Yanjun Cao, Emily BJ Coffey, and Giovanni Beltrame. Planetary exploration with robot teams: Implementing higher autonomy with swarm intelligence. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 27(2):159–168, 2019.
- [8] Sonia Waharte, Niki Trigoni, and Simon Julier. Coordinated search with a swarm of uavs. In 2009 6th ieee annual communications society conference on sensor, mesh and ad hoc communications and networks workshops, pages 1–3. IEEE, 2009.
- [9] Lenka Pitonakova, Richard Crowder, and Seth Bullock. Information flow principles for plasticity in foraging robot swarms. *Swarm Intelligence*, 10:33–63, 2016.
- [10] Vito Trianni and Alexandre Campo. Fundamental collective behaviors in swarm robotics. *Springer handbook of computational intelligence*, pages 1377–1394, 2015.
- [11] Enric Galceran and Marc Carreras. A survey on coverage path planning for robotics. *Robotics and Autonomous* systems, 61(12):1258–1276, 2013.
- [12] Gianpiero Francesca, Manuele Brambilla, Arne Brutschy, Vito Trianni, and Mauro Birattari. Automode: A novel approach to the automatic design of control software for robot swarms. *Swarm Intelligence*, 8:89–112, 2014.
- [13] G. M. Viswanathan, Sergey V. Buldyrev, Shlomo Havlin, M. G. E. da Luz, E. P. Raposo, and H. E. Stanley. Optimizing the success of random searches. *Nature*, 401(6756):911–914, 1999.
- Bernd Heinrich. Resource heterogeneity and patterns of movement in foraging bumblebees. *Oecologia*, 40:235–245, 1979.
- [15] Rosario N. Mantegna. Fast, accurate algorithm for numerical simulation of levy stable stochastic processes. *Physical Review E*, 49(5):4677, 1994.
- [16] Elliott W. Montroll and George H. Weiss. Random walks on lattices. ii. *Journal of Mathematical Physics*, 6(2):167–181, 1965.
- [17] Aryeh Dvoretzky and Paul Erdös. Some problems on random walk in space. In *Proc. Second Berkeley Symposium*, pages 353–367, 1951.
- [18] Rataj, Schmidt, and Spodarev. On the expected surface area of the wiener sausage. *Mathematische Nachrichten*, 282(4):591, 2009.
- [19] Miquel Kegeleirs, David Garzón Ramos, and Mauro Birattari. Random walk exploration for swarm mapping. In *Annual conference towards autonomous robotic systems*, pages 211–222. Springer, 2019.
- [20] Toshio Yanagida, Masahiro Ueda, Tsutomu Murata, Seiji Esaki, and Yoshiharu Ishii. Brownian motion, fluctuation

and life. Biosystems, 88(3):228-242, 2007.

[21] Hian L. Kwa, Jabez Leong Kit, and Roland Bouffanais. Balancing collective exploration and exploitation in multi-agent and multi-robot systems: A review. *Frontiers in Robotics and AI*, 8, February 1 2022.